


数学

上册

全国技工院校公共基础课程教材



第 8 版

 中国劳动社会保障出版社

目 录

.....
Contents

第 1 章 运算与方程

1.1 数与式的运算 / 4

1.2 解方程与方程组 / 13

本章小结 / 22

探索中国 / 24

第 2 章 不等式与集合

2.1 不等式的性质与解集 / 30

2.2 一元一次不等式(组) / 37

2.3 一元二次不等式 / 43

2.4 含有绝对值的不等式 / 49

本章小结 / 54

探索中国 / 55

第 3 章 函数

3.1 函数的概念及表示 / 60

3.2 函数的基本性质 / 72

3.3 幂函数 / 83

3.4 指数函数 / 91

3.5 对数函数 / 97

本章小结 / 112

探索中国 / 113

第 4 章 三角函数

4.1 角的概念的推广 / 118

4.2	任意角的三角比 / 128
4.3	三角比的诱导公式 / 140
4.4	三角函数的图像与性质 / 148
4.5	正弦型函数 / 162
	本章小结 / 168
	探索中国 / 169

数

全国

S

◎数学

数学

数学

数学

数学

数学

数学

数学

数学

数学

数学

数学

2.3 一元二次不等式

实例考察

受各种成本和销售策略的影响,随着商品销量提升,工厂的利润并非总是均匀增加的.请研究以下案例:

某技工院校学生毕业回家乡创业,开办工厂生产金属模具并销售.已知工厂每天销售产品数量 x (单位:件) 与利润 y (单位:元) 之间满足关系式 $y = -10x^2 + 400x$. 若该厂希望每天的利润在 3 000 元以上,那么一天大约应销售多少产品?

根据题意得不等式

$$-10x^2 + 400x > 3\,000,$$

整理得

$$x^2 - 40x + 300 < 0.$$

这是一个关于 x 的不等式,求出满足这个不等式的解集是问题的关键.

类似实例考察中得到的不等式还有很多,例如:

$$x^2 - x + 1 > 0,$$

$$-2x^2 + 3x + 5 < 0.$$

上述不等式都只含有一个未知数,且未知数的最高次数为二次,我们把这样的不等式称为**一元二次不等式**,它的一般形式是

$$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0),$$

或

$$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0).$$

需要注意的是,一元二次不等式的二次项系数不等于 0. 例如,不等式 $x^2 + 5x + 3 > x^2 - 1$ 不是一元二次不等式,因为经整理后得到的不等式是 $5x + 4 > 0$,其二次项系数为 0.

如何求一元二次不等式的解集呢?

我们先观察二次函数 $y = x^2 - 3x - 4$ 的图像 (图 2-11), 并讨论:

(1) 当 $y=0$ 时, x 取什么值?

(2) 二次函数 $y = x^2 - 3x - 4$ 的图像与 x 轴交点的坐标是什么?

(3) 当 $y < 0$ 时, x 的取值范围是什么?

(4) 当 $y > 0$ 时, x 的取值范围是什么?

我们知道, 二次函数 $y = x^2 - 3x - 4$ 的图像是一条开口向上的抛物线, 因此:

(1) 当 $y=0$ 时, 即得到一元二次方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$, 解得方程的两个实数根 $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

(2) 由图可知, 二次函数 $y = x^2 - 3x - 4$ 的图像与 x 轴交点的坐标分别是 $(-1, 0)$, $(4, 0)$.

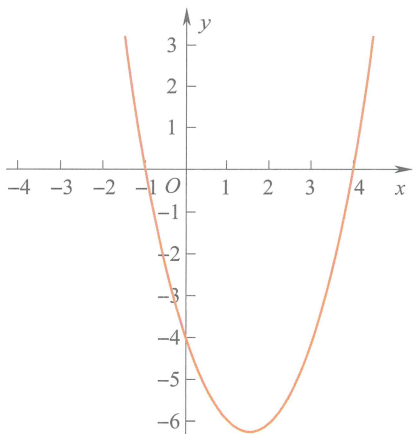


图 2-11

(3) 当 $y < 0$ 时, x 的取值范围是 $(-1, 4)$, 即不等式 $x^2 - 3x - 4 < 0$ 的解集为 $(-1, 4)$.

(4) 当 $y > 0$ 时, x 的取值范围是 $(-\infty, -1)$ 或 $(4, +\infty)$.

一般地, 由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**并集**, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

图 2-12 中的阴影部分即表示 $A \cup B$.

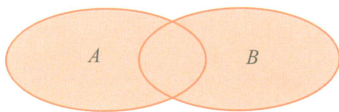


图 2-12

因此，不等式 $x^2-3x-4>0$ 的解集为 $(-\infty, -1)\cup(4, +\infty)$.

上述方法可以推广到任意的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ ($a>0$), 或 $ax^2+bx+c<0$ ($a>0$).

我们知道，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$)，方程根的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$. 它的根按照 $\Delta>0, \Delta=0, \Delta<0$ 可分为三种情况. 相应地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的位置关系也可分为三种情况. 因此，我们分三种情况来讨论对应的一元二次不等式的解集，见下表.

判别式 $\Delta=b^2-4ac$		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 的图像				
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 的根		有两个不相等的实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (取 $x_1<x_2$)	有两个相等的实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式的解集	$ax^2+bx+c>0$ ($a>0$)	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	$(-\infty, -\frac{b}{2a}) \cup (-\frac{b}{2a}, +\infty)$	\mathbf{R}
	$ax^2+bx+c<0$ ($a>0$)	(x_1, x_2)	\emptyset	\emptyset

例题解析

例 1 求下列集合的并集.

(1) $A = \{0, 3, 2, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$;

(2) $A = \{x \mid x < -2\}$, $B = \{x \mid x \leq 1\}$;

解 (1) $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(2) 如图 2-13 所示, 在数轴上表示集合 A 与 B 为

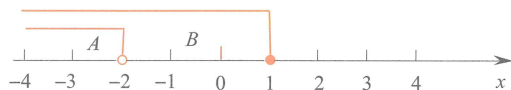


图 2-13

所以, $A \cup B = (-\infty, 1]$.

例 2 求实例考察中的一元二次不等式的解集.

解 方程 $x^2 - 40x + 300 = 0$ 的解是 $x_1 = 10$, $x_2 = 30$,

因此, 对应的一元二次不等式的解集为 $(10, 30)$, 即每天应销售大于 10 且小于 30 件产品, 才能保证利润在 3 000 元以上.

例 3 求下列一元二次不等式的解:

(1) $x^2 - 2x - 3 > 0$;

(2) $-2x^2 + 5x - 2 \geq 0$;

(3) $x^2 - 4x + 4 > 0$.

解 (1) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$.

方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的两个实根为

$$x_1 = -1, x_2 = 3.$$

所以, 原不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

(2) 原不等式可化为 $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$, 则

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 > 0.$$

方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两个实根为

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2.$$

所以, 原不等式的解集为 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

数学 上册

全国技工院校公共基础课程教材

SHUXUE

◎数学（第8版 上册）

数学（第8版 上册）学习指导与练习

数学（第8版 上册）教学参考书

数学（第8版 下册）

数学（第8版 下册）学习指导与练习

数学（第8版 下册）教学参考书

数学（第8版 下册）（电工电子类）

数学（第8版 下册）（电工电子类）学习指导与练习

数学（第8版 下册）（电工电子类）教学参考书

数学（第8版 下册）（机械建筑类）

数学（第8版 下册）（机械建筑类）学习指导与练习

数学（第8版 下册）（机械建筑类）教学参考书

责任编辑 / 宋 正

武柏芸

责任校对 / 张 芬

责任设计 / 姜力维

ISBN 978-7-5167-6436-7



9 787516 764367 >

定价：24.00 元